

aperçu

sur la topologie

le rôle des mathématiques dans la connaissance

quelques pas
dans le domaine
de la topologie

Imaginons la situation suivante.

Muni d'un certain nombre de piquets je me déplace sur une plage de sable. De loin en loin je m'arrête et je plante un piquet avant de reprendre ma route. Au terme de ce périple mon itinéraire est jalonné d'un certain nombre de piquets. En outre je marque le trajet lui-même par une ligne continue ou par un cordon que je fixe sur les piquets.

J'ai ainsi matérialisé une certaine configuration semblable à celle que les entrepreneurs marquent sur le sol quand ils tracent l'emprise d'un futur bâtiment.

Mais ce n'est pas de cela dont il sera question ici. Nous voudrions nous servir de cette situation comme point de départ d'une présentation sommaire de la **topologie intuitive** et d'une réflexion sur le rôle des mathématiques dans la connaissance.

Nous allons donc considérer les opérations décrites à l'instant comme un simple exercice de **marquage d'une portion d'espace**.

Qu'avons-nous marqué ?

A l'aide de nos piquets nous avons marqué des « points singuliers », des « points remarquables » auxquels nous pouvons associer des étiquettes portant chacune un nom distinct et que nous pourrions donc désormais **identifier**.

A l'aide du cordon nous avons établi des **liens** entre certains de ces piquets et il suffit que nous nommions les deux piquets consécutifs entre lesquels court le cordon pour que nous puissions, ici encore, identifier sans ambiguïté l'« arc » correspondant. En même temps ces arcs « découpent » sur le terrain, de part et d'autre de la ligne qu'ils forment, des portions d'espace que nous pouvons distinguer l'une de l'autre au **voisinage** de ladite ligne. Autrement dit un tel arc, en même temps qu'il **unit** deux piquets (que nous allons désormais appeler « sommet »), **sépare** deux portions du territoire.

Supposons en outre que notre itinéraire, à un moment, se **referme** sur lui-même, c'est-à-dire que le cordon repasse par un piquet déjà planté. Dans ce cas une partie du terrain se trouve close, de toute part, par des arcs et nous pouvons identifier sans ambiguïté cette région en nommant les arcs qui jalonnent son pourtour (sa « frontière »).

Au total nous avons fait sortir l'espace indifférencié du départ et nous lui avons donné une sorte de « visage » pouvant être décrit en termes de points (les sommets), de traits (les arcs) et de surfaces délimitées (que nous appellerons « régions »).

Désireux de conserver un souvenir de la configuration que nous avons ainsi tracée nous prenons une feuille de papier et nous y dessinons un schéma tel que celui de la **figure 1**.

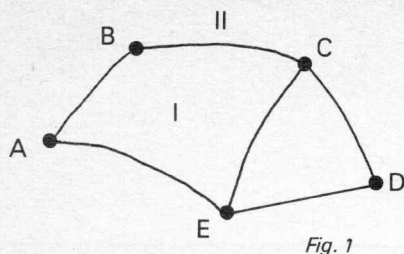


Fig. 1

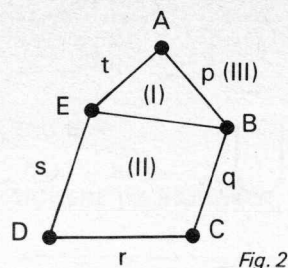


Fig. 2

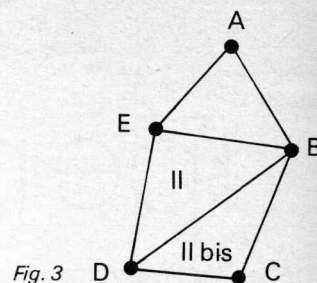


Fig. 3

Naturellement ce dessin n'est pas l'exacte réplique de la configuration de départ. La feuille est plane, alors que la surface de la plage ne l'était pas. Les piquets ont été remplacés par des points et le cordon par une ligne. Le tracé graphique est beaucoup plus petit que le tracé sur le terrain. Nous ne respectons non plus, ni l'orientation ni la forme exacte des arcs. Mais malgré cela le dessin réalisé évoque, pour certains usagers, la configuration d'origine. C'est qu'en effet il reproduit un certain nombre de **relations**, dites **relations topologiques**, qui se trouvent à l'état latent sur la configuration originale.

Que faut-il entendre par là ?

Considérons, par exemple, les **relations d'incidence**.

Sur le dessin original le piquet B se trouve sur l'arc AB et sur l'arc BC. Cette particularité est respectée sur le schéma. Elle l'est également pour tous les autres points de la figure. Je dis que la **relation d'incidence est respectée**.

Sur l'original l'arc BC concourt à former une frontière séparant la région I et la région II. La même situation se retrouve sur le schéma. La **relation « frontière » est respectée**.

Quand nous parcourons la configuration originale de A à C en passant par B, B se trouve **entre** A et C. Il en va de même sur le dessin : le sommet B « image » du piquet B se trouve entre le sommet A « image » du piquet A et le sommet C « image » du piquet C. La **relation « entre » est donc respectée**.

Considérons maintenant le parcours BCEAB sur la configuration originale. C'est un parcours fermé, en ce sens qu'il ramène au point de départ. Le parcours homologue sur le schéma est lui aussi fermé. La **transposition original/schéma respecte la relation de fermeture**.

Arrêtons-là ce bref inventaire.

Il nous a permis de toucher du doigt le fait qu'une configuration du genre de celle que nous avons prise pour exemple constitue, du point de vue où nous nous plaçons, un **système de relations élémentaires fondamentales qu'on peut transcrire sur un schéma approprié**.

Ces relations sont dénommées **topologiques** parce qu'elles trouvent leur origine dans le domaine spatial. Étant donné leur importance, elles font l'objet, au sein de l'édifice général des mathématiques, d'un chapitre spécial qui connaît depuis un siècle des développements impressionnants.

— Mais, pourrait nous demander le lecteur non averti, en quoi consiste l'**activité mathématique** dans tout cela ?

La réponse n'est pas aisée à donner. Toutefois les considérations qui précèdent peuvent nous aider à entrevoir ce que pourrait être cette réponse.

Revenons donc aux relations topologiques et examinons-les dans une perspective dynamique. Pour cela nous présenterons deux exemples :

1er exemple : la règle d'Euler

Considérons (fig. 2) une configuration simple (que nous appelons désormais « graphe ») comportant 5 sommets (A, B, C, D, E), 6 arcs (p, q, r, s, t, u). Ce tracé délimite 3 régions : la région I, intérieure au triangle curviligne ABE, la région II, intérieure au quadrilatère BCDE et la région III dans laquelle « baigne » la figure.

Nous pouvons complexifier ce graphe de bien des façons, en lui adjoignant par exemple l'arc BD (fig. 3). Ce faisant nous laissons **invariant** le nombre de sommets et nous ajoutons une région puisque la région II se trouve scindée en deux. Le nouveau graphe comporte 5 sommets, 4 régions, 7 arcs (contre 5S, 3R, 6A, dans le cas précédent).

Nous pouvons aussi, à partir du graphe 2, réaliser le graphe 4 en plaçant un sommet F sur l'arc AB. Ceci revient à partager l'arc AB en deux, donc à créer un nouvel arc, tandis que le nombre de régions reste cette fois inchangé. Ce graphe 4 se caractérise par le « triplet » d'Euler (6, 3, 7).

Partant toujours du graphe 2 nous formons le graphe 5 en plaçant un sommet F en dehors d'un arc existant. Pour conserver un graphe « tout d'une pièce », c'est-à-dire dont tous les éléments se tiennent (les spécialistes disent « connexe »), nous devons relier le sommet F au reste du dessin par au moins 1 arc, aboutissant par exemple en A. Ce faisant nous ne changeons pas le nombre de régions et nous avons le même triplet (6, 3, 7) que dans le graphe précédent bien que les deux graphes soient eux-mêmes différents.

A travers ces modifications nous commençons à pressentir qu'il doit exister entre le nombre des sommets, le nombre des arcs et le nombre des régions des

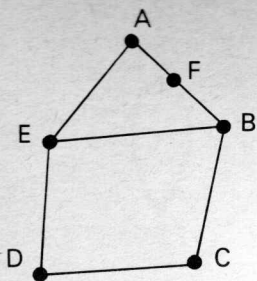


Fig. 4

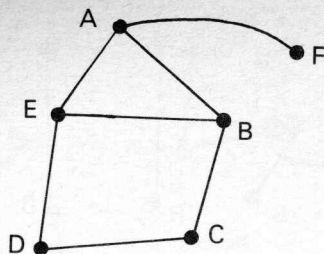


Fig. 5



Fig. 6

graphes considérés certains liens inhérents à la « nature profonde des choses », nature profonde qui n'est pas immédiatement perceptible mais qui commence à fasciner dès qu'on pressent son existence.

C'est bien ainsi que les enfants ressentent la situation. Quand ce genre de recherches a été proposé aux enfants de sa classe, âgés de 9 ans environ, par un instituteur de nos amis (*), les élèves sont partis avec passion à la découverte des liens qu'ils commençaient à entrevoir. Et ils n'ont arrêté leur recherche qu'après avoir découvert la fameuse **règle d'Euler** . Celle-ci énonce : « Dans tout graphe (du type considéré) le nombre total des sommets et des régions dépasse de deux unités le nombre des arcs » ($S + R = A + 2$).

Ayant constaté que cette règle s'appliquait dans tous les cas de configuration qu'ils avaient eu l'occasion de traiter ils ont tenté de la mettre en défaut en trouvant au moins un contre-exemple, imaginant pour cela des graphes de plus en plus complexes ou, à l'inverse, de plus en plus simples.

Ce faisant ils ont développé une démarche de **doute scientifique et critique** dont l'aspect formateur, pour l'intelligence comme pour la personnalité, est évident.

Mais on peut aller plus loin que n'ont pu le faire les enfants de 9 ans en question et chercher à **passer de la constatation à la démonstration**.

Pour ce faire une méthode s'offre à nous, la méthode de démonstration par récurrence, dont nous présentons ci-dessous le schéma.

Nous partons du cas simple d'un graphe élémentaire (fig. 6) formé de deux sommets et de l'arc qui les relie. Il y a alors une seule région et le « triplet d'Euler » (S, R, A) s'établit comme suit : (2, 1, 1).

Partant de ce graphe de base on lui fait subir tour à tour des modifications du type de celles dont nous avons parlé plus haut. La **figure 7** rassemble **tous les cas possibles**.

On constate que la règle $S + R = A + 2$, qui est évidente pour le graphe élémentaire de base reste vraie quand on procède d'un pas dans la voie de la complexification.

Partant des nouvelles configurations obtenues, on peut entreprendre une nouvelle étape de complexification.

On vérifie que dans chaque cas l'équilibre de la formule d'Euler est respectée et on découvre qu'il ne peut en être autrement puisque, que l'on ajoute un sommet sans créer de région, ou que l'on crée une région sans ajouter de sommet il faut chaque fois ajouter un arc, ce qui revient à ajouter une unité dans chaque membre de l'égalité d'Euler.

Comme tout graphe (du type considéré), aussi complexe soit-il, peut être construit par une démarche « pas..à..pas », dont nous avons esquissé ci-dessus les premières étapes, nous sommes certains qu'à chaque nouvelle étape la règle d'Euler sera respectée, y compris à la dernière étape.

Nous avons donc une certitude. Nous avons fait une démonstration.

(On aurait pu également mettre en œuvre un **raisonnement par l'absurde**. Dans ce cas on suppose qu'on a réussi à fabriquer un graphe ne respectant pas la règle d'Euler et on montre, en simplifiant pas à pas, que cette hypothèse conduit à un résultat inacceptable, absurde. Donc l'hypothèse de base est fausse et la règle d'Euler s'applique).

2^e exemple : parcours eulérien

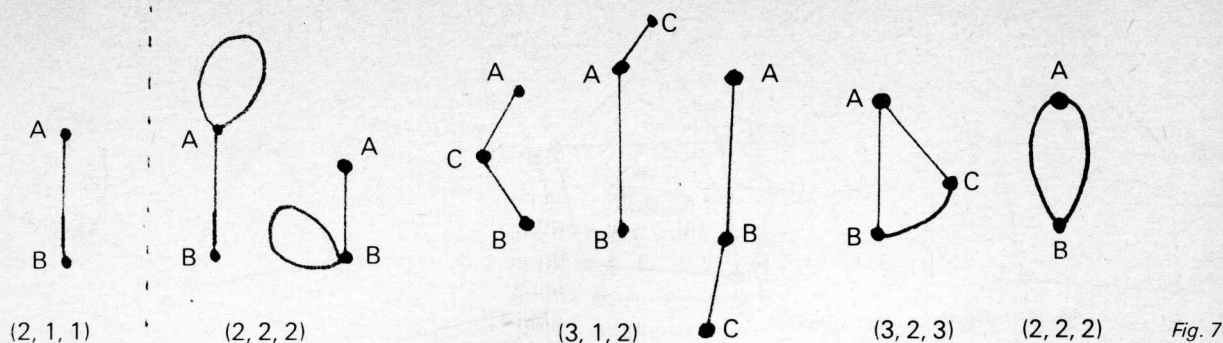
Prenons un cordon, par exemple un lacet de soulier ou une ficelle, des punaises et un carton. Disposons le cordon sur le carton en le fixant par des punaises de telle façon qu'il prenne la forme représentée sur la **figure 8**.

Nous nous arrangeons pour que le cordon passe plusieurs fois par certains sommets mais en aucun cas le cordon ne repasse sur un arc existant (il peut **croiser** mais pas **recouvrir**).

Observons certaines des particularités du graphe obtenu.

Nous nous intéressons au **nombre d'extrémités d'arc qui aboutissent à un sommet donné**. Sur le graphe 8 ces nombres sont **pairs** pour tous les sommets à l'exception du sommet A de départ et du sommet B d'arrivée. Et cela n'est pas dû au hasard. Un sommet simple « ordinaire » tel que F, est à la fois le point d'arrivée d'un arc et le point de départ d'un autre. Si nous passons une seconde fois par un tel point, par exemple B, nous ajoutons aux **deux** extrémités d'arc précédents **deux** nouvelles extrémités, et ainsi de suite. Dans tous les cas le « degré » du sommet reste **pair**.

(*) Cf. ARP n° 6, septembre 1972, 27 avenue du 11-Novembre - 92190 Meudon, France.



Par contre le sommet A de départ et le sommet H d'arrivée sont forcément **impairs** à moins que nous ne refermions le lacet sur lui-même et que nous ne fassions par là-même coïncider le point de départ et le point d'arrivée (fig. 9).

Nous avons épuisé tous les cas de figure possibles (on revient au point de départ ou non) et nous pouvons énoncer la règle selon laquelle **dans un graphe du type considéré** (c'est-à-dire constitué par une suite continue d'arcs qu'on peut parcourir de bout en bout sans emprunter deux fois le même arc) **il y a au maximum deux sommets de degré impair**.

A l'inverse, sur le graphe de la figure 10 il est impossible de trouver un chemin qui permette de décrire tout le graphe sans passer deux fois par le même arc. Ce graphe compte plus de deux sommets de degré impair (les sommets B, C, D, E sont de degré impair).

On donne le nom de **graphe eulérien** à un graphe que l'on peut parcourir entièrement sans passer deux fois par le même arc. Les deux graphes 8 et 9 sont eulériens. Le graphe 10 ne l'est pas.

(Le lecteur est invité à rechercher parmi les graphes illustrant le présent article ceux qui sont eulériens et ceux qui ne le sont pas et, dans le premier cas, à les tracer d'un seul trait de crayon ne repassant pas deux fois par un même arc.)

Nous avons ici un deuxième exemple d'une activité qui, à partir de l'observation d'un nombre limité de graphes, nous permet de **dégager une règle générale applicable à tous les graphes d'une espèce donnée** (dans le cas présent la famille des graphes planaires connexes).

réflexions sur l'activité mathématique

A partir de ces exemples nous sommes en mesure de présenter quelques réflexions sur les caractères de l'activité mathématique.

Dans ce qui précède notre démarche a comporté trois moments essentiels.

Le premier moment a consisté à passer du réel physique (le terrain, le lacet...), tel qu'il s'offrait à nous, au **schéma**.

Moyennant un **code approprié** le schéma transcrit un certain nombre des propriétés relationnelles qu'offre la réalité dont il est issu. On dira qu'il fournit de cette réalité un modèle.

Ces schémas sont des créations de l'esprit. Ils se présentent sous la forme concrète d'un dessin mais **au point de vue où nous nous sommes placés**, ils nous intéressent par les abstractions dont ils sont le vecteur.

Et c'est sur ces êtres nouveaux à double visage — une face concrète, une face abstraite — que nous portons désormais notre attention.

En fait — deuxième moment de notre enquête — nous avons tout d'abord observé un graphe particulier et nous avons ainsi constaté qu'il présentait 5 sommets, 3 régions, 6 arcs.

Dresser ainsi l'inventaire des éléments constitutifs du graphe, les regrouper par « famille » (ici au nombre de trois), décompter combien chaque « famille » comporte d'éléments et mettre les nombres obtenus en relation, tout cela constitue une démarche globale qui s'inscrit dans une perspective mathématique.

Toutefois, si nous en étions restés là, nous n'aurions pas dépassé le stade de l'observation. Nous aurions fait, en quelque sorte, de l'histoire naturelle sur des êtres artificiels dénommés graphes. Quand nous disons « tel graphe a 5 sommets, 3 régions, 6 arcs », c'est un peu comme si nous disions « tel animal a 6 pattes, 1 nez et 2 yeux ».

En fait nous n'en sommes pas restés là et nous avons abordé un troisième moment de notre activité en **généralisant**.

Du graphe **particulier** nous sommes passé à la **famille**. De l'**individu** nous sommes passé à la **classe**.

Nous avons alors changé de niveau d'abstraction.

Telle propriété relationnelle, tant qu'elle était propre à un « individu » singulier (tel ou tel graphe) pouvait être d'un intérêt pratique mais elle ne constituait pas la matière d'un savoir généralisable. A partir du moment où elle est vérifiée pour tous les graphes de la classe, elle change de nature et peut désormais servir à des fins différentes.

C'est à ce moment-là que nous voyons se dégager la spécificité de la démarche mathématique, démarche qui apparaît comme s'attachant à l'étude de l'objet quelconque, de l'objet collectif (par opposition à l'objet singulier).

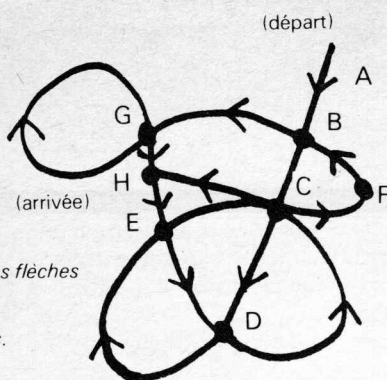


Fig. 8. — Les flèches indiquent le sens du parcours.

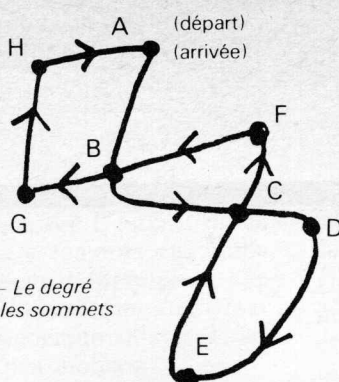


Fig. 9. — Le degré de tous les sommets est pair.

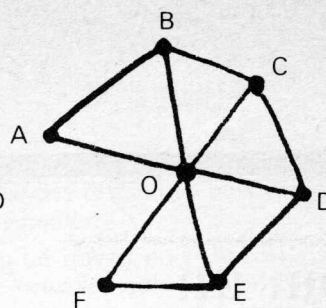


Fig. 10

Cette démarche se distingue de l'observation et de la pratique des classifications telles qu'on les trouve dans les sciences naturelles parce qu'elle recourt au raisonnement logique articulé et aux démonstrations.

De cette démarche nous n'avons donné qu'un aperçu très fruste, et encore tout imprégné de références au concret.

Il faudrait, si l'on voulait approfondir la question, apporter bien des nuances et ajouter bien des développements à ce que nous avons dit. En fait notre propos voulait seulement illustrer le type de démarche qui caractérise la pensée mathématicienne.

Le peu que nous en avons dit permet d'entrevoir qu'il est possible d'aller beaucoup plus loin dans la voie amorcée.

Aller plus loin cela signifie créer par des définitions appropriées des « êtres mathématiques » que l'on manipulera ensuite suivant un système de règles soigneusement précisées. Cela signifie mettre en place un langage spécifique qui permette de discourir sur ces êtres, sur leurs relations, sur les systèmes en lesquels ces relations peuvent être organisées, sur les transformations que l'on peut faire subir à ces êtres et à ces systèmes en laissant invariants tels ou tels de leurs caractères, etc.

En un mot c'est bâtir un corps de connaissances dans lequel on pourra puiser chaque fois que l'on aura à résoudre un problème particulier.

Car là est bien la finalité du savoir mathématique : on fait appel à lui quand il peut fournir un outil approprié pour résoudre tel ou tel problème particulier.

« êtres topologiques » dont traite la topologie intuitive se rattachent sans difficulté au domaine de la vie quotidienne. Il aura pu constater également que pour tracer les figures étudiées il n'est besoin ni de règle, ni de compas, ni de double décimètre, ni de rapporteur. Tout peut être dessiné à main levée.

C'est dire que très tôt les êtres topologiques peuvent être proposés aux enfants comme matière première pour des activités d'observation et de réflexion extrêmement fructueuses.

Les expériences qui ont été faites depuis plusieurs années à l'école expérimentale Decroly de St-Mandé et auxquelles nous avons fait allusion plus haut ont confirmé cette facile accessibilité des relations topologiques (*).

Ces expériences ont en outre montré que les questions topologiques peuvent susciter chez des enfants âgés de 9-11 ans un intérêt passionné. Ceci s'explique sans doute parce que l'étude des relations topologiques se prête à une pédagogie active de recherche et de découverte. L'enfant peut aisément, par ses propres moyens, dessiner les graphes de son choix et jalonner sa recherche d'autant de tâtonnements qu'il est nécessaire.

D'autre part les relations à découvrir, notamment dans les deux exemples développés ci-dessus — la formule d'Euler et les graphes eulériens — ont le mérite d'être simples tout en n'étant pas triviales. Elles se présentent un peu comme des énigmes — et l'on sait combien les énigmes sollicitent les hommes en général et les enfants en particulier — mais des énigmes dont la solution est à la portée des enfants...

Jean et Simone SAUVY

intérêt pédagogique de la topologie

Pour terminer nous voudrions insister un peu sur l'intérêt pédagogique de la topologie élémentaire.

Le lecteur, d'après les exemples que nous avons donnés plus haut, a pu se rendre compte que les

(*) Le psychologue de Genève, J. Piaget, et ses collaborateurs ont apporté sur ce point, depuis plus de vingt ans, des données décisives.

N.B. — Les lecteurs qui souhaiteraient davantage d'informations concernant la topologie intuitive pourront se reporter à notre ouvrage de la collection Casterman/poche portant le titre « L'enfant à la découverte de l'espace » (1972).